www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

Ecole Centrale des Arts et Manufactures — Ecole Supérieure d'Electricité
Ecole Centrale de Lyon — Ecole Supérieure d'Optique

Concours d'admission 1989

MATHEMATIQUES II TA

Dans tout le problème, E désigne un espace affine réel euclidien (de dimension 2 dans la première partie, de dimension 3 dans les autres parties), $\vec{E}$ désigne l'espace vectoriel associé à E. On note $\vec{u}.\vec{v}$ le produit scalaire de tout couple $(\vec{u},\vec{v})$ de $\vec{E}$ et $|\vec{v}|$ la norme euclidienne de tout vecteur $\vec{v}$ de $\vec{E}$. Pour tout endomorphisme h de $\vec{E}$, le terme "valeur propre de h" est entendu au sens de racine réelle du polynôme caractéristique; la transposée d'une matrice A est notée A^*.

La première partie introduit, dans le cadre plus simple du plan, certaines idées qui sont développées dans les parties suivantes, mais ces dernières peuvent être traitées indépendamment d'elle.

Première Partie

Dans toute cette partie E est supposé de dimension 2; c'est donc un plan affine euclidien.

On considère dans E un repère orthonormal fixe $R_o=(O;\vec{I},\vec{J})$; les coordonnées d'un point M dans R_o sont notées X,Y.

I.1 On considère l'ellipse S d'équation $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-1=0$

Où a et b sont deux constantes réelles vérifiant $a > b > 0$.

a) On considère l'automorphisme f de $\vec{E}$ tel que $f(\vec{I})=\frac{1}{a}\vec{I}$ et $f(\vec{J})=\frac{1}{b}\vec{J}$ montrer que S est l'ensemble des points M de E tels que $|f(\overrightarrow{OM})|=1$.

b) Soit la droite $d_f(M)$ passant par M et dirigée par le vecteur $f(\overrightarrow{OM})$. Montrer qu'il existe un point A commun à $(O;\vec{J})$ et à $d_f(M)$, un point B commun à $(O;\vec{I})$ et à $d_f(M)$ tels que les longueurs MA et MB restent constantes quand M décrit S.

I.2 Soit h un automorphisme de $\vec{E}$ et H la matrice associée à h dans la base $(\vec{I},\vec{J})$.

a) Montrer que pour tout vecteur $\vec{v}=X\vec{I}+Y\vec{J}$, on a l'égalité :

$$|h(\vec{v})|^2=(XY)\,H^*H\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}.$$

b) Montrer que l'ensemble des points M de E tels que $|h(\overrightarrow{OM})|^2=1$ est une ellipse de centre O, notée S_h.

On aura intérêt à considérer la diagonalisation de l'automorphisme k dont la matrice dans la base $(\vec{I},\vec{J})$ est H^*H, automorphisme dont on montrera qu'il est symétrique à valeurs propres strictement positives.
Interpréter les directions des axes de S_h à l'aide de k. Quelle relation y a-t-il entre le déterminant de h et les demi-longueurs des axes de S_h?

I.3 On considère deux automorphismes h_1 et h_2 de $\vec{E}$, de matrices associées, dans R_o, H_1 et H_2 respectivement.

a) Montrer que $S_{h_1}=S_{h_2}$ si et seulement si $H_1^*H_1=H_2^*H_2$

b) En déduire que $S_{h_1}=S_{h_2}$ Si et seulement si il existe ω, automorphisme orthogonal de $\vec{E}$, tel que $h_1=\omega h_2$.

Tournez la page S.V.P.

I.4 On suppose ici donnés deux vecteurs unitaires, $\vec{I}$, $\vec{J}$ et l'on désigne par θ l'angle orienté $(\vec{I}, \vec{J})$; on suppose que θ n'est pas un multiple de π. On considère une tige rectiligne T, sur laquelle on a choisi une orientation et marqué trois points A, B, M tels que $\overline{AM} = p$ et $\overline{BM} = q$; p et q sont deux constantes distinctes non nulles données. T se déplace dans E et prend toutes les positions compatibles avec les conditions suivantes : A reste sur la droite passant par O et dirigée par $\vec{J}$, B reste sur la droite D passant par O et dirigée par $\vec{I}$. On se propose d'étudier la courbe S_1 décrite par M.

a) Etablir que, pour toute position de la tige T, le vecteur $\vec{v} = \frac{1}{p}\overrightarrow{AM} = \frac{1}{q}\overrightarrow{BM}$ est unitaire et donner ses coordonnées dans la base $(\vec{I}, \vec{J})$ en fonction des coordonnées x et y de M dans le repère $(O; \vec{I}, \vec{J})$.

b) Pour tout vecteur $\alpha\vec{I}+\beta\vec{J}$, où α et β sont des réels, exprimer le carré de sa norme en fonction de α, β, θ.

c) Soit g l'automorphisme de $\vec{E}$ tel que $g(\vec{I}) = \frac{\vec{I}}{p}$, $g(\vec{J}) = \frac{\vec{J}}{q}$. Montrer qu'un point m de E est une position prise par le point M de la tige si et seulement si $|g(\overrightarrow{Om})| = 1$.

d) Etablir qu'une équation de S_1 dans le repère $(O; \vec{I}, \vec{J})$ est :

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} + 2\cos\theta\,\frac{xy}{pq} - 1 = 0.$$

e) Montrer que $S_1 = S_g$ et donner la nature de S_1. Montrer que $|pq|$ est égal au produit des demi-longueurs des axes de S_1.

I.5 On se propose, l'ellipse S considérée en I.1 étant donnée, de trouver une infinité de modes de génération de S du type étudié en I.4. On introduit pour cela deux réels φ_1 et φ_2 tels que $\theta = \varphi_2 - \varphi_1$ ne soit pas multiple de π; on pose : $\vec{I} = \cos\varphi_1\vec{I} + \sin\varphi_1\vec{J}$, $\vec{J} = \cos\varphi_2\vec{I} + \sin\varphi_2\vec{J}$

a) M étant le point générique du plan, on désigne par (X, Y) ses coordonnées dans le repère orthonormal $(O; \vec{I}, \vec{J})$ et par (x, y) ses coordonnées dans le repère $(O; \vec{I}, \vec{J})$. Exprimer X et Y en fonction de x, y, φ_1, φ_2.

b) Les demi-droites $(O; \vec{I})$ et $(O; \vec{J})$ coupent S respectivement en P et Q. On pose : $\overrightarrow{OP} = p\vec{I}$, $\overrightarrow{OQ} = q\vec{J}$

Calculer $\frac{1}{p^2}$ en fonction de a, b, φ_1 et $\frac{1}{q^2}$ en fonction de a, b, φ_2.

c) En supposant $\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \neq 0$, montrer que l'on a $pq = ab$ si et seulement si $(\tan\varphi_1 \tan\varphi_2)^2 = \frac{b^2}{a^2}$.

Lorsque $\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 = 0$, quand a-t-on $pq = ab$?

d) On suppose désormais que l'on a choisi φ_1 et φ_2 tels que $\tan\varphi_1 \tan\varphi_2 = \varepsilon\frac{b}{a}$ avec $\varepsilon = 1$ ou $\varepsilon = -1$. Montrer qu'alors l'équation de S dans le repère $(O; \vec{I}, \vec{J})$ peut s'écrire : $\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} + 2\frac{xy}{pq}k - 1 = 0$

avec $k = \frac{b}{a}\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \frac{a}{b}\sin\varphi_1 \sin\varphi_2$

en déduire : $k = \varepsilon\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$

e) On se place dans le cas $\varepsilon = +1$; donner une génération de S comme ensemble des positions du point M d'une tige mobile satisfaisant à des conditions que l'on précisera soigneusement.

f) Effectuer le même travail dans le cas $\varepsilon = -1$.

Tournez la page S.V.P.

Deuxième Partie

E est dans toute la suite du problème un espace affine de dimension 3. On donne trois contantes non nulles p, q, r, supposées deux à deux distinctes. On fixe dans E un repère $(O; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ **quelconque.** Soit φ l'automorphisme de $\vec{E}$ qui transforme $\vec{I}$ en $\frac{\vec{I}}{p}$, $\vec{J}$ en $\frac{\vec{J}}{q}$, k en $\frac{\vec{k}}{r}$. Pour tout point M de E autre que O, la droite passant par M et dirigée par $\varphi(\overrightarrow{OM})$ est notée $d_\varphi(M)$.

II.1 Soit T une tige rectiligne mobile sur laquelle on a choisi une orientation et marqué 4 points A, B, C, M tels que $\overline{AM} = p$, $\overline{BM} = q$, $\overline{CM} = r$; cette tige prend toutes les positions compatibles avec les conditions suivantes : A reste dans le plan $(O; \vec{J}, \vec{K})$, B reste dans le plan $(O; \vec{I}, \vec{K})$, C reste dans le plan $(O; \vec{I}, \vec{J})$. On se propose d'étudier l'ensemble σ des positions prises par M.

a) On pose, comme en **I.4 a** : $\vec{v} = \frac{1}{p}\overrightarrow{AM} = \frac{1}{q}\overrightarrow{BM} = \frac{1}{r}\overrightarrow{CM}$

Etablir que $\vec{v}$ est unitaire et donner ses coordonnées dans la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ en fonction des coordonnées x,y,z de M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, k)$.

b) Soit m un point de E. Montrer qu'il appartient à σ si et seulement si $|\varphi(\overrightarrow{Om})| = 1$.

c) On considère un repère **orthonormal** $(O; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ et la matrice F de φ dans ce repère.
Montrer que le point m de coordonnnées X, Y, Z dans le repère $(O; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ appartient à σ si et seulement si $(XYZ)\, F^*F \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = 1$.

d) En déduire que σ est un ellipsoïde. comment obtient-on les axes de σ à partir de F^*F ?
Donner la valeur absolue du déterminant de φ en fonction des demi-longueurs des axes de σ. Que peut-on dire de la valeur absolue du produit pqr ?

II.2 On poursuit ici l'étude du problème de la question précédente en supposant le repère $(O; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ **orthonormal.**

a) Déterminer une équation de σ dans le repère $\mathcal{R} = (O; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$

b) (x, y, z) désignant les coordonnées d'un point M de σ, donner les coordonnées des points A, B, C correspondants.

c) En déduire l'ensemble des positions prises respectivement par A, B, C lorsque M décrit σ ; ces ensembles seront désignés par U_A, U_B, U_C.

On se place dans le cas p=-1, q=1, r=2 et l'on prend comme unité 2 cm.
Le point $M_o\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ est alors sur σ. Représenter les projections sur le plan $(O; \vec{I}, \vec{J})$ de σ, U_A, U_B, U_C, M_o, A_o, B_o, C_o où A_o, B_o, C_o sont les points correspondants à M_o.

II.3 Dans cette question de la partie II, et **dans cette question seulement,** on suppose que p et q sont égaux et distincts de r. A et B sont alors confondus et situés sur la droite $(O; \vec{K})$.

a) Etudier, dans cette hypothèse, l'ensemble σ défini au II.1.

b) Quelle propriété possède σ lorsque le repère $(O; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ est orthonormal ?

Tournez la page S. V. P.

Troisième Partie

On donne un repère orthonormal d'origine O, = $(O; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ et un ellipsoïde d'équation dans : $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} - 1 = 0$ $(a > 0, b > 0, c > 0)$

Soit s l'automorphisme de $\vec{E}$ tel que $s(\vec{I}) = \frac{\vec{I}}{a}$, $s(\vec{J}) = \frac{\vec{J}}{b}$, $s(K) = \frac{\vec{K}}{c}$.

déduire de la partie II un mode de génération de par déplacement d'une tige rectiligne soumise à des conditions que l'on précisera.

III.1 Soit h un automorphisme de $\vec{E}$ et H la matrice de h dans la base orthonormale $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$.

a) Montrer que l'ensemble des points M de coordonnées (X, Y, Z) dans le repère $(O; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ tels que $|h(\overrightarrow{OM})| = 1$ est défini par l'équation

$$(XYZ)\ H^*H \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} - 1 = 0 .$$

Cet ensemble est noté S_h.

b) Montrer que S_h est un ellipsoïde. Définir les axes de S_h et relier le produit des demi-longueurs des axes de S_h au déterminant de h.

III.2

a) Montrer que S_h = si et seulement si il existe un automorphisme orthogonal ω de $\vec{E}$ tel que $h = \omega s$.

b) En supposant que h, distinct de s, est tel que S_h = et que h est diagonalisable, déduire de la partie II un mode de génération par déplacement d'une tige rectiligne (soumise à des conditions que l'on précisera) différent de celui envisagé au III.1.

III.3 on suppose ici que l'on a : a = b = 1, c = 4.

On considère l'automorphisme h tel que : $h(\vec{I}) = \vec{I}$

$h(\vec{J}) = \vec{K}$

$h(\vec{K}) = \frac{\vec{J}}{4}$

Etablir que S_h = .

Déterminer les valeurs propres et les directions propres de h. En déduire une génération de du type étudié en (II.1). On précisera, avec les notations de la partie II, les distances mutuelles des points h,A,B,C; on fera une figure en projection sur le plan $(O; \vec{J}, \vec{K})$.

III.4 Dans le cas où est une sphère peut-on trouver h ayant 3 valeurs propres distinctes et telle que S_h = ? Quels sont les automorphismes h diagonalisables ayant une valeur propre double et une valeur propre simple tels que S_h = ? Quelle génération peut-on déduire pour ?

*** FIN ***

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail